群表示理论

June 12, 2017

version 0.1

正规子群

Contents

1 Clifford 定理 **1**

2 不变量和拓展性 **3**

这一章中我们将会讨论正规子群的特征标。

1 Clifford 定理

定义 1.1: 假设 $H \lhd G$, ϑ 是 H 的类函数, $g \in G$, 令 $\vartheta^g : H \to \mathbb{C}, \vartheta^g(h) = \vartheta(ghg^{-1})$, 我们称 ϑ^g 在 G 中和 ϑ 共轭。

引理 1.1: 令 $H \lhd G$, φ, ϑ 是 H 的类函数, $x, y \in G$, 那么

(a) φ^x 是类函数

(b) $(\varphi^x)^y = \varphi^{xy}$

(c) $[\varphi^x, \vartheta^x] = [\varphi, \vartheta]$

(d) 对于 G 的类函数 χ, $[\chi_H, \varphi^x] = [\chi_H, \varphi]$

(e) 如果 φ 是特征标, 那么 φ^x 也是。

定理 1.1: (*Clifford*) 令 $H \lhd G, \chi \in Irr(G), \vartheta$ 是 χ_H 的不可约部分, 假设 $\vartheta = \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_t$ 是 ϑ 在 G 中不同的共轭部分, 那么 $\chi_H = e\sum_{i=1}^{t} \vartheta_i$, 其中 $e = [\chi_H, \vartheta]$。

接下来我们尝试证明上述 Clifford 定理在模理论下的形式, 同时也是更为普适的形式。

定义 1.2: 令 $H \lhd G$, W_1, W_2 是 $F[H]$-模, 那么称 W_1 和 W_2 共轭如果存在 W_i 的一组基使得其对应的 H 的 F-表示是共轭的。

引理 1.2: 假设 V 是一个 $F[G]$-模, $H \lhd G$, 假设 $W \subseteq V$ 是一个 $F[H]$-子模

(a) 如果 $g \in G$, 那么 Wg 是 V 的 $F[H]$-子模, 并且和 W 共轭。

(b) 如果 M 是一个 $F[H]$-模并且和 W 共轭, 那么存在 $g \in G$ 使得 $M \cong W_g$

(c) 如果 $U \subseteq V$ 是一个 $F[H]$-子模并且和 W 同构, 那么在 $F[H]$-模意义上 $U_g \cong W_g$

定理 1.2: (*Clifford*) 假设 $H \lhd G$, V 是一个不可约 $F[G]$-模, W 是任意 V 的不可约 $F[H]$-子模, 那么

(a) $V = \sum \cdot W_i$, 其中 W_i 是 V 的不可约 $F[H]$-子模

(b) 每个 W_i 都可以写成 Wg_i 的形式 $(g_i \in G)$，因此 W_i 和 W 共轭

(c) 对于任意和 W 同构的 $F[H]$-模 M 来说，$n_W(V) = n_M(V)$

推论 1.1： 假设 $H \lhd G$，V 是域 F 上的不可约 $F[G]$-模，那么当把 V 视为 $F[H]$-模时，V 是完全可约的。

接下来我们给出从第一个 Clifford 定理得到的一些有意思的推论。

推论 1.2： 假设 $H \lhd G$，$\chi \in Irr(G)$，$[\chi_H, 1_H] \neq 0$，那么 $H \subseteq ker\chi$。

引理 1.3： 令 $H \lhd G$，$\chi \in Irr(G)$，$\vartheta \in Irr(G)$ 且 $[\chi_H, \vartheta] \neq 0$，那么 $\vartheta(1)|\chi(1)$。

定理 1.3： 假设对于任意 $\chi \in Irr(G)$，$\chi(1)$ 是素数 p 的幂，那么 G 有一个正规阿贝尔 p-补集。

定义 1.3： 令 $H \lhd G$，$\vartheta \in Irr(H)$，那么 $I_G(\vartheta) = \{g \in G | \vartheta^g = \vartheta\}$ 是 ϑ 在 G 中的惯性群。

下面我们介绍一个对于学习正规子群的特征标理论非常重要的定理以及一些由它得到的推论。

定理 1.4： 假设 $H \lhd G$，$\vartheta \in Irr(H)$，$T = I_G(\vartheta)$，令 $\mathcal{A} = \{\psi \in Irr(T) | [\psi_H, \vartheta] \neq 0\}$，$\mathcal{B} = \{\chi \in Irr(G) | [\chi_H, \vartheta] \neq 0\}$，那么

(a) 如果 $\psi \in \mathcal{A}$，那么 ψ^G 是不可约的

(b) 映射 $\psi \mapsto \psi^G$ 是 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的双射

(c) 如果 $\psi^G = \chi$，$\chi \in \mathcal{A}$，那么 ψ 是 χ_T 在 $\mathcal{A}$ 中唯一不可约部分

(d) 如果 $\psi^G = \chi$，$\chi \in \mathcal{A}$，那么 $[\psi_H, \vartheta] = [\chi_H, \vartheta]$。

推论 1.3： 假设 $\chi \in Irr(G)$ 是本原的，那么对于任意 $N \lhd G$，χ_N 是 N 的不可约特征标的倍数。

推论 1.4： 假设 G 有一个可靠的本原特征标，$A \lhd G$ 是阿贝尔群，那么 $A \subseteq \boldsymbol{Z}(G)$。

推论 1.5： 每个幂零群都是 M-群。

定理 1.5： *(Ito)* 假设 $A \lhd G$ 是阿贝尔群，那么对于任意 $\chi \in Irr(G)$，$\chi(1)$ 整除 $|G:A|$。

由上述定理和定理 6.3 我们可以得出结论 G 有一个阿贝尔正规 p-补集等价于任意 $\chi \in Irr(G)$，$\chi(1)$ 是 p 的幂。

2 不变量和拓展性

定理 2.1： 假设 $N \lhd G$，$\varphi, \vartheta \in Irr(N)$ 是 G 中的不变量，假设 $\varphi\vartheta$ 是不可约的并且 ϑ 可以拓展到 $\chi \in Irr(G)$，令 $\mathcal{A} = \{\beta \in Irr(G) | [\varphi^G, \beta] \neq 0\}$，$\mathcal{B} = \{\psi \in Irr(G) | [(\varphi\vartheta)^G, \psi] \neq 0\}$。那么 $\beta \mapsto \beta\chi$ 定义了从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的双射。

当上述定理在 $\varphi = 1_N$ 的情况下可以得到下面这个重要的推论。

推论 2.1： (*Gallagher*) 令 $N \lhd G$, $\chi \in Irr(G)$, $\chi_N = \vartheta \in Irr(N)$。那么对于 $\beta \in Irr(G/N)$，特征标 $\beta\chi$ 是不可约的，对于不同的 β 有不同的取值，并且都是 ϑ^G 的不可约部分。

下面是一些对于研究可解群的特征标有帮助的定理和推论。

定理 2.2： 假设 K/L 是 G 的阿贝尔主子式，$\vartheta \in Irr(K)$ 是 G 中的不变量，那么下述三条中必有一条成立：

(a) $\vartheta_L \in Irr(L)$

(b) 对于 $\varphi \in Irr(L)$ 以及 $e^2 = |K:L|$，有 $\vartheta_L = e\varphi$

(c) $\vartheta_L = \sum_{i=1}^{t} \varphi_i$，其中 φ_i 是不同的 $\varphi_i \in Irr(L)$，$t = |K:L|$

推论 2.2： 令 $N \lhd G$，$|G:N| = p$，p 是素数，假设 $\chi \in Irr(G)$，那么下述两条必有一条成立：

(a) χ_N 是不可约的

(b) $\chi_N = \sum_{i=1}^{p} \vartheta_i$，其中 ϑ_i 是不同的不可约特征标。

推论 2.3： 假设 $N \lhd G$，$|G:N| = p$，p 是素数，$\vartheta \in Irr(N)$ 是 G 中的不变量，那么 ϑ 可以被拓展到 G 上。

为了进一步探究 M-群有关的性质，我们给出下面的定义和定理。

定义 2.1： 令 $N \lhd G$，$\chi \in Irr(G)$，那么称 χ 是对于 N 的相关 M-特征标如果存在 H 满足 $N \subseteq H \subseteq G$ 和 $\psi \in Irr(H)$ 使得 $\psi^G = \chi$，$\psi_N \in Irr(N)$。如果任意 $\chi \in Irr(G)$ 都是对于 N 的相关 M-特征标，那么称 G 是对于 N 的相关 M-群。

定理 2.3： 假设 $N \lhd G$，G/N 是可解的，并且假设 G/N 的每个子群的每个主子式都有非方排序，那么 G 是对于 N 的相关 M-群。

下面我们给出判定一个群是否是 M-群的更一般的充分条件。

定理 2.4： 令 $N \lhd G$，假设 N 的所有 *Sylow* 子群都是阿贝尔群，假设 G 可解并且是对于 N 的相关 M-子群，那么 G 是一个 M-群。

为了研究 G 中不变量 $\vartheta \in Irr(N)$ 拓展到 G 的问题，我们将这个问题替换为拓展线性特征标 $det\vartheta$ 的问题。

引理 2.1： 假设 $N \lhd G$，$\vartheta \in Irr(N)$ 可以被拓展到 G，$(|G:N|, \vartheta(1)) = 1$。令 $\lambda = det\vartheta$，μ 是 λ 到 G 的拓展，那么存在唯一的 ϑ 到 G 的拓展 χ 使得 $det\chi = \mu$。

定理 2.5： 假设 $N \lhd G$，G/N 是可解的，$\vartheta \in Irr(N)$ 是 G 中不变量，$(\vartheta(1), |G:N|) = 1$，那么 ϑ 可以被拓展到 G 当且仅当 $det\vartheta$ 可以被拓展到 G。

我们现在研究线性特征标拓展的充分条件。

定理 2.6： 假设 $N \lhd G$，λ 是 N 的线性特征标，同时也是 G 中的不变量。对于任意素数 $p|o(\lambda)$，选择 $H_p \subseteq G$ 满足 $H_p/N \in Syl_p(G/N)$，并且 λ 可以拓展到 H_p，则 λ 可以拓展到 G。

推论 2.4： 假设 $N \lhd G$, λ 是 N 的线性特征标, 同时也是 G 中的不变量, $(|G:N|, o(\lambda)) = 1$，那么 λ 有唯一到 G 的拓展 μ 满足 $(|G:N|, o(\mu)) = 1$。事实上 $o(\lambda) = o(\mu)$。

推论 2.5： 假设 $N \lhd G, G/N$ 是可解的, $\vartheta \in Irr(N)$ 是 G 中不变量, $(|G:N|, o(\vartheta)\vartheta(1)) = 1$，那么 ϑ 有唯一的拓展 $\chi \in Irr(G)$ 满足 $(|G:N|, o(\chi)) = 1$。事实上 $o(\vartheta) = o(\chi)$。

定义 2.2: 假设 χ 是 G 的特征标，p 是一个素数。那么 χ 是p-有理的如果存在整数 r 满足 $p \nmid r$ 并且对于任意 $g \in G$ 有 $\chi(g) \in \mathbb{Q}[e^{2\pi i/r}]$。

定理 2.7: 假设 $N \lhd G$，G/N 是一个 p-群，$p \neq 2$，假设 $\vartheta \in Irr(N)$ 是 G 当中的不变量并且是 p-有理的，那么 ϑ^G 有唯一的 p-有理的不可约部分 χ，并且 $\chi_N = \vartheta$。