群表示理论

June 12, 2017

version 0.1

诱导特征标

Contents

对于 $H \subseteq G$，我们可以把 G 的特征标 χ 限定在 H 上得到 H 的特征标 χ_H。在这一章中我们试图从 H 的特征标反过来诱导出 G 的特征标。

1 诱导特征标

定义 1.1： 令 $H \subseteq G$,φ 是 H 的类函数，那么 G 上的诱导类函数 φ^G，可以由下式给出：$\varphi^G(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\varphi^\circ(xgx^{-1})$。其中，如果 $h \in H$，$\varphi^\circ(h) = \varphi(h)$; 如果 $h \notin H$,$\varphi^\circ(h) = 0$。

引理 1.1： （*Frobenius Reciprocity*）令 $H \subseteq G$，如果 φ 是 H 上的类函数且 ϑ 是 G 上的类函数，那么 $[\varphi, \vartheta_H] = [\varphi^G, \vartheta]$。

推论 1.1： 令 $H \subseteq G$，如果 φ 是 H 的特征标，那么 φ^G 是 G 的特征标。

推论 1.2： 令 $H \subseteq G$，如果 $\varphi \in Irr(H)$，那么存在 $\chi \in Irr(G)$ 使得 φ 是 χ_H 的一部分。

推论 1.3： 令 G 是阿贝尔群，如果 $H \subseteq G$，那么每一个 $\lambda \in Irr(H)$ 都是某些 $\mu \in Irr(G)$ 的限制。

诱导特征标可以被用于计算特征标表。下面我们尝试使用模理论来计算诱导特征标。

定义 1.2： 令 V 是一个 $F[G]$-模，假设 $V = W_i \dot{+} \ldots \dot{+} W_k$，其中，$W_i$ 是 V 中可以被 G 的功能置换的子空间，那么 $V = W_i \dot{+} \ldots \dot{+} W_k$ 是 V 的一个非本原分解。如果 V 不可约且没有真非本原分解（也就是说，*k>1*），那么 V 是一个本原 $F[G]$-模。

定理 1.1： 令 $V = W_1 \dot{+} \ldots \dot{+} W_k$ 是 $F[G]$-模 V 的非本原分解。假定 $F \subseteq \mathbb{C}$。令 H 是 W_1 的稳定化子。假定 V 对应的 G 的特征标为 χ，W_1 对应的 H 的特征标为 ϑ，那么 $\chi = \vartheta^G$

定理 1.2： 令 $H \subseteq G$ 并且令 W 是一个 $F[H]$-模。那么存在一个 $F[G]$-模 V 有非本原分解 $V = \sum W_i$，其中 H 是 W_i 的稳定化子并且 $W_i \cong W$ 是 $F[H]$-模。

接下来我们尝试使用诱导特征标得到一些有用的结论。

定义 1.3： 令 χ 是 G 的特征标，如果 $\chi=\lambda^G$，并且 λ 是 G 的子群的线性特征标，那么 χ 是单项的。如果每一个 $\chi\in Irr(G)$ 是单项的，群 G 就是一个M-群。

引理 1.2： 令 ϑ 是 $H\subseteq G$ 的特征标，那么 $ker(\vartheta^G)=\bigcap_{x\in G}(ker\vartheta)^x$。

定理 1.3： 令 G 是一个 M-群，并令 $1=f_1<f_2<\cdots<f_k$ 是 G 的不可约特征标的不同维数。令 $\chi\in Irr(G)$ 并且 $\chi(1)=f_i$，那么 $G^{(i)}\subseteq ker\chi$，其中 $G^{(i)}$ 表示 G 的导出列的第 i 项。

推论 1.4： *(Taketa)* 令 G 是一个 M-群，那么 G 是可解的。

2 有关置换群、子群与循环子群

下面我们来了解特征标理论与群作用相关的一些定理。

引理 2.1： 令 G 传递作用于 Ω，令 $\alpha\in\Omega$ 且 $H=G_\alpha$。那么 $(1_H)^G$ 是该作用的置换特征标。

推论 2.1： G 以置换特征标 χ 作用于 Ω。假设 Ω 在 G 的作用下恰好分解成 k 个轨道，那么 $[\chi,1_G]=k$。

推论 2.2： 假设 G 以置换特征标 χ 传递作用于 Ω 上，$\alpha\in\Omega$ 并且 G_α 在 Ω 上有 r 个轨道（其中一个就是 $\{\alpha\}$），那么 $[\chi,\chi]=r$。

推论 2.3： G 以置换特征标 χ 作用于 Ω，那么这个作用是 *2*-传递的当且仅当 $\chi=1_G+\psi$，其中 $\psi\in Irr(G)$ 并且 $\psi\neq 1_G$。

接下来我们尝试从群的特征标给出的信息找出子群。

定理 2.1： 令 $H\subseteq G$，$\chi=(1_H)^G$，那么

(a) $\chi(1)||G|$

(b) $[\chi,\psi]\leq\psi(1),\psi\in Irr(G)$

(c) $[\chi, 1_G] = 1$

(d) 对于任意 $g \in G$，$\chi(g)$ 是非负整数

(e) 对于 $g \in G$ 和整数 m，$\chi(g) \leq \chi(g^m)$

(f) $\chi(g) = 0$ 如果 $o(g) \nmid |G|/\chi(1)$

(g) 对于任意 $g \in G$，$\chi(g)|Cl(g)|/\chi(1)$ 是整数。

下面这个定理可以用来找出群的真子群。

定理 2.2： （*Brauer*）令 χ 是 G 特征标并且 $[\chi, 1_G] = 0$，令 $A, B \subseteq G$ 并且 $[\chi_A, 1_A] + [\chi_B, 1_B] > [\chi_{A\cap B}, 1_{A\cap B}]$，那么 A 和 B 生成了 G 的真子群。

接下来是应用 Brauer 定理找出子群的一个例子。

定理 2.3： 令 G 是单群，假定 $|G| = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$，那么 $G \cong A_6$。

我们希望可以直接从线性特征标的诱导中得到群的特征标，我们将特征标限定为有理特征标，子群限定在循环子群上，得到了下述结论。

定理 2.4： （*Artin*）令 χ 是 G 的有理特征标，那么 $\chi = \sum \frac{a_H}{|\boldsymbol{N}(H):H|} 1_H^G$，其中 H 遍历了 G 上所有的循环子群，$a_H \in \boldsymbol{Z}$。

推论 2.4： χ 是 G 的任意有理特征标，那么 $|G|\chi = \sum_H a_H 1_H^G$，其中 H 遍历 G 上的所有循环子群，$a_H \in \mathbb{Z}$。