



群表示理论
June 12, 2017
version 0.1

特征标和完整性

Contents

1	代数整数	1
2	Burnside 定理	1
3	不可约特征标的维数和零化	2
4	Glauberman 定理	3

这一章我们主要介绍了 Burnside 定理和代数整数的相关性质，并通过代数整数的性质推导出了有关不可约特征标的一些定理，最后简要介绍了 Glauberman 定理。

1 代数整数

定义 1.1: 代数整数是形如 $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ 的多项式的复数根，其中 $a_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq i \leq n-1$ 。

引理 1.1: 有理代数整数恰好是 $\mathbb{Z}$ 中的元素。

引理 1.2: 令 $X = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ 是由代数整数组成的有限集合，那么存在环 S 满足：

(a) $\mathbb{Z} \subseteq S \subseteq \mathbb{C}$

(b) $X \subseteq S$

(c) 存在一个有限集 Y ，满足 S 中的每个元素都是 Y 中元素的 $\mathbb{Z}$ -线性组合。

定理 1.1: 令 S 是满足 $\mathbb{Z} \subseteq S \subseteq \mathbb{C}$ 的环，假设 S 可以有限生成成为一个 $\mathbb{Z}$ -模，那么 S 中的每一个元素都是代数整数。

推论 1.1: 代数整数之和和之积依然是代数整数。

推论 1.2: 令 χ 是群 G 的特征标，那么对于任意 $g \in G$ ， $\chi(g)$ 是代数整数。

接下来几节，我们将利用代数整数的性质证明有关不可约特征标和群的一些定理。

2 Burnside 定理

令 G 是一个群并且 $\chi \in \text{Irr}(G)$ 。我们想要基于 χ 定义一个从群代数 $\mathbb{C}[G]$ 的中心映射到 $\mathbb{C}$ 的函数 ω 。令 $\mathfrak{X}$ 是 χ 对应的表示，如果 $z \in \mathbf{Z}(\mathbb{C}[G])$ ，那么 $\mathfrak{X}(z) = \varepsilon I, \varepsilon \in \mathbb{C}$ ，其中 ε 的选择依赖于 $\mathfrak{X}$ ，因此我们定义 $\omega(z) = \varepsilon$ 。我们通常记作 ω_χ 来强调 ω 对 χ 的依赖关系。

定理 2.1: 令 $\chi \in \text{Irr}(G)$ ， K 是 $\mathbb{C}[G]$ 当中的类和，那么 $\omega_\chi(K)$ 是一个代数整数。

下面的定理描述了 Burnside 定理的本质。

定理 2.2: (*Burnside*) 令 $\chi \in \text{Irr}(G)$, $\mathcal{K}$ 是 G 的一个共轭类, $g \in \mathcal{K}$ 。假设 $(\chi(1), |\mathcal{K}|) = 1$, 那么要么 $g \in \mathbf{Z}(\chi)$, 要么 $\chi(g) = 0$ 。

定理 2.3: 令 G 是一个非阿贝尔单群, 那么 $\{1\}$ 是 G 中唯一一个大小为素数幂的共轭类。

由上面两个定理我们可以得到下面这个著名的 Burnside 定理。

定理 2.4: 令 $|G| = p^a q^b$, 其中 p 和 q 都是素数, 那么 G 是可解的。

证明: 对 $|G|$ 使用归纳法, 假设 $|G| > 1$, 取 G 的最大真正规子群 N 。如果 $N > 1$, 那么由归纳假设可知 N 和 G/N 是可解的, 因此 G 也是可解的。如果 $N = 1$, 那么 G 就是单群, 令 $P \neq 1$ 是 G 的一个 Sylow 子群, 取 $g \in \mathbf{Z}(P), g \neq 1$, 从而 $|Cl(g)| = |G : \mathbf{C}(g)|$ 整除 $|G : P|$, 而 $|G : P|$ 是一个素数幂, 由上个引理可知 G 是阿贝尔群, 因而 G 可解。

3 不可约特征标的维数和零化

定理 3.1: 令 $\chi \in \text{Irr}(G)$, 那么 $\chi(1) \mid |G|$

定理 3.2: 令 $\chi \in \text{Irr}(G)$, 那么 $\chi(1) \mid |G : \mathbf{Z}(\chi)|$

定理 3.3: 假设 G 有一个度数为 p^a 的可靠的不可约特征标, 其中 p 是素数并且 G 的 Sylow p -子群是阿贝尔群, 那么 p^a 就是 p 除 $|G : \mathbf{Z}(G)|$ 的幂。

引理 3.1: 令 G 是一个循环群, χ 是 G 的特征标。令 $S = \{g \in G \mid G = \langle g \rangle\}$, 并且假定对任意 $s \in S$, $\chi(s) \neq 0$, 那么 $\sum_{s \in S} |\chi(s)|^2 \geq |S|$ 。

定理 3.4: (*Burnside*) 令 $\chi \in \text{Irr}(G)$ 并且有 $\chi(1) > 1$, 那么存在 $g \in G$ 使得 $\chi(g) = 0$

4 Glauberman 定理

定义 4.1: 令 $H \subseteq \mathbb{C}[G]$, 其中 H 是乘法群并且是 $\mathbb{C}[G]$ 的一组基。假设 H 中的每一个元素都是 G 中元素的 $\mathbb{Z}$ -线性组合, 那么 H 是 $\mathbb{C}[G]$ 的完整群基。

定理 4.1: (*Glauberman*) 令 H 是 $\mathbb{C}[G]$ 中的完整群基, 那么存在从 H 的共轭类到 G 的一一对应使得如果 $\mathcal{L}$ 对应 $\mathcal{K}$, 那么 $|\mathcal{L}| = |\mathcal{K}|$ 并且 $\sum \mathcal{L} = \pm \sum \mathcal{K}$ 。

我们需要用到下面这个引理来证明 Glauberman 定理

引理 4.1: 令 $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}(\mathbb{C}[G])$, 将 G 的特征标视为定义在 $\mathbb{C}(G)$ 上, 定义 $\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(\alpha) \bar{\chi}(\beta)$, 那么

$$(a) \langle c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2, \beta \rangle = c_1 \langle \alpha_1, \beta \rangle + c_2 \langle \alpha_2, \beta \rangle$$

$$(b) \langle \beta, \alpha \rangle = \langle \bar{\alpha}, \beta \rangle$$

$$(c) \langle K_i, K_j \rangle = 0, \text{ 如果 } i \neq j$$

$$(d) \langle K_i, K_i \rangle = |G| |\mathcal{K}_i|$$

其中 $\mathcal{K}_i$ 是 G 的类, $K_i = \sum \mathcal{K}_i$ 。

由 Glauberman 定理我们还可以得到下面几个有用的推论。

推论 4.1: 令 H 是 $\mathbb{C}[G]$ 的完整群基, 那么存在一个 $\mathbb{C}[G]$ 的完整群基 H^* 使得 $H \cong H^*$ 并且 H^* 的类和与 G 的类和相等。

推论 4.2: 令 H 是 $\mathbb{C}[G]$ 的完整群基, 那么 G 和 H 有相同的特征标表。

定理 4.2: 令 H 是 $\mathbb{C}[G]$ 的完整群基, 那么在 $\mathbb{C}[G]$ 中, $\mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}[H]$