



群表示理论
June 12, 2017
version 0.1

群表示和特征标

Contents

1	特征标	1
2	类函数	2
3	特征标与矩阵的中心	3

1 特征标

令 G 是一个有限群, F 是一个域。假设 $\mathfrak{X}$ 是 $F[G]$ 的维数为 n 的表示, 由于 $\mathfrak{X}$ 是代数同态, $\mathfrak{X}(1) = I$, 可知对 $g \in G$, $\mathfrak{X}(g)^{-1}$ 是非奇异的, 并且 $\mathfrak{X}(g)^{-1} = \mathfrak{X}(g^{-1})$ 。如果我们把表示 $\mathfrak{X}$ 限定在 $G \subseteq F[G]$ 上, 我们就得到了一个从 G 到 $GL(n, F)$ 的群同态。

定义 1.1: 令 F 是一个域, G 是一个群, 那么 G 的 F -表示就是同态 $\mathfrak{X}: G \rightarrow GL(n, F)$ 。

我们通过一个 $F[G]$ 的表示得到了 G 的 F -表示, 反过来, 我们也可以通过 G 的 F -表示 $\mathfrak{X}_0$ 来决定 $F[G]$ 的表示 $\mathfrak{X}$: $\mathfrak{X}(\sum a_g g) = \sum a_g \mathfrak{X}_0(g)$ 。因此我们可以用同样的记号来表示 G 的 F -表示和 $F[G]$ 的表示, 同时不可约和相似等相关性质也同样适用于 G 的 F -表示。

接下来我们假设 $N \triangleleft G$, $\mathfrak{X}$ 是 G 的 F -表示并且有 $N \subseteq \ker \mathfrak{X}$, 那么我们就可以得到一个 G/N 的 F -表示 $\bar{\mathfrak{X}}$: $\bar{\mathfrak{X}}(Ng) = \mathfrak{X}(g)$ 。这个公式同样可以用于在给定 $\bar{\mathfrak{X}}$ 的条件下得到 $\mathfrak{X}$, 而且 $\bar{\mathfrak{X}}$ 和 $\mathfrak{X}$ 保持相同的不可约性, 因此我们可以对这两者不做过多的区分。

表示的一个问题就是它含有过多的冗余信息, 对于 G 中的每一元素来讲, $\mathfrak{X}(g)$ 有 n^2 个值与之对应, 因此即使是相似表示, 它们也可以有很多种不同的表现形式。特征标理论就是为了去掉这些多余的信息, 只保留有用的部分。我们通过计算表示矩阵的迹来实现这一点。

定义 1.2: 令 $\mathfrak{X}$ 是一个 G 的 F -表示, 那么由 $\mathfrak{X}$ 得到的 G 的 F -特征标 χ 为 $\chi(g) = \text{tr} \mathfrak{X}(g)$

引理 1.1: 相似表示有着相同的特征标; 特征标在群的共轭类上保持相同的值。

定理 1.1: 令 $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_r$ 是群 G 的共轭类。令 $K_i = \sum_{x \in \mathcal{K}_i} x \in \mathbb{C}[G]$, 则 K_i 是 $Z(\mathbb{C}[G])$ 的一组基且对于任意 $K_i K_j = \sum a_{ijv} K_v$, a_{ijv} 是非负整数。

推论 1.1: G 的不可约表示的相似类的数量和 G 的共轭类的数量相同。

推论 1.2: 群 G 是阿贝尔群当且仅当它的每一个不可约特征标都是线性的。

推论 1.3: G 是一个群, 那么 $|Irr(G)|$ 等于 G 的共轭类的数量并且 $\sum_{\chi \in Irr(G)} \chi(1)^2 = |G|$ 。

2 类函数

定义 2.1: 群 G 的类函数 $\varphi: G \rightarrow \mathbb{C}$ 满足在 G 的共轭类上值不变。

所有的特征标都是类函数。

定理 2.1: G 的每一个类函数都可以被唯一地表示为: $\varphi = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} a_{\chi} \chi$, 其中 $a_{\chi} \in \mathbb{C}$ 。并且, φ 是特征标当且仅当所有的 a_{χ} 都是非负整数并且 $\varphi \neq 0$

推论 2.1: 令 $\mathfrak{X}$ 和 $\mathfrak{Y}$ 是群 G 的 $\mathbb{C}$ -表示, 那么 $\mathfrak{X}$ 和 $\mathfrak{Y}$ 是相似的当且仅当它们有相同的特征标。

我们已经知道了所有的类函数都可以唯一地由不可约特征标的线性组合表示出来, 为了研究类函数空间, 我们尝试将不可约特征标看成一组基, 并研究它们之间的“正交关系”。

研究正交关系的关键是要根据特征标计算出群元素在 e_i 上的系数。为了做到这一点, 我们需要用到正规模 $\mathbb{C}[G]^{\circ}$ 对应的表示所得到的特征标 ρ 。我们称之为正规特征标, 它可以用以下两种方式计算出来。

引理 2.1: 如果 $g \in G$ 并且 $g \neq 1$, 那么 $\rho(g) = 0$ 。同时 $\rho(1) = |G|$ 。

引理 2.2: $\rho = \sum_{i=1}^k \chi_i(1) \chi_i$

定理 2.2: $e_i = (1/|G|) \sum_{g \in G} \chi_i(1) \chi_i(g^{-1}) g$

定理 2.3: (普遍正交关系) 对于任意 $h \in G$,

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(gh) \chi_j(g^{-1}) = \delta_{ij} \frac{\chi_i(h)}{\chi_i(1)}$$

在上述定理中令 $h = 1$, 我们得到第一正交关系。

推论 2.2: (第一正交关系)

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g) \chi_j(g^{-1}) = \delta_{ij}$$

为了简化 $\chi(g^{-1})$ 这一表达, 我们有下列引理。

引理 2.3: 令 $\mathfrak{X}$ 是由特征标 χ 得到的 G 的表示, 令 $g \in G$, $n = o(g)$ 那么

(a) $\mathfrak{X}$ 相似于对角矩阵 $\text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_f)$

(b) $\varepsilon_i^n = 1$

(c) $\chi(g) = \sum \varepsilon_i$ 并且 $|\chi(g)| \leq \chi(1)$

(d) $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$

定义 2.2: 令 φ 和 ϑ 是群 G 的类函数, 那么 $[\varphi, \vartheta] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \overline{\vartheta(g)}$ 是 φ 和 ϑ 的内积。

通过上述定义和第一正交关系的描述, 我们有 $[\chi_i, \chi_j] = \delta_{ij}$, 至此我们已可以将不可约特征标看作是类函数空间的一组正交基, 并通过不可约特征标完整地刻画类函数空间。

推论 2.3: 令 χ 和 ψ 是 G 的特征标。那么 $[\chi, \psi] = [\psi, \chi]$ 是非负整数。同时 χ 是不可约的当且仅当 $[\chi, \chi] = 1$ 。

定理 2.4: (第二正交关系) 令 $g, h \in G$, 那么 $\sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(g) \overline{\chi(h)} = 0$ 如果 g 和 h 在 G 中不同构; 否则, 上式等于 $|C(g)|$ 。

3 特征标与矩阵的中心

引理 3.1: 令 $\mathfrak{X}$ 是 G 的 n 维不可约 $\mathbb{C}$ -表示。假设 A 是一个 $\mathbb{C}$ 上的 $n \times n$ 矩阵, 并且对于任意 $g \in G$ 和 $\mathfrak{X}(g)$ 交换, 那么 $A = \alpha I, \alpha \in \mathbb{C}$

定义 3.1: 令 χ 是 G 的特征标, 那么 $Z(\chi) = \{g \in G | |\chi(g)| = \chi(1)\}$ 。

引理 3.2: 令 χ 是 G 的特征标, $Z = Z(\chi)$, $f = \chi(1)$, $\mathfrak{X}$ 是对应 χ 的 G -表示, 那么

(a) $Z = \{g \in G | \mathfrak{X}(g) = \varepsilon I, \varepsilon \in \mathbb{C}\}$

(b) Z 是 G 的子群

(c) $\chi_Z = f\lambda$, 其中 λ 是 Z 的线性特征标

(d) $Z/\ker\chi$ 是周期的

(e) $Z/\ker\chi \subseteq Z(G/\ker\chi)$

(f) 如果 $\chi \in \text{Irr}(G)$, 那么 $Z/\ker\chi = Z(G/\ker\chi)$

推论 3.1: 令 G 是一个群, 那么 $Z(G) = \bigcap \{Z(\chi) | \chi \in \text{Irr}(G)\}$

由上述定理, 我们可以通过矩阵的特征标表找到矩阵的中心。

引理 3.3: 令 $H \subseteq G$, χ 是 G 的特征标, 那么 $[\chi_H, \chi_H] \leq |G:H|[\chi, \chi]$, 等号成立当且仅当对于任意 $g \in G - H$ 有 $\chi(g) = 0$ 。

推论 3.2: 令 $\chi \in \text{Irr}(G)$, 那么 $\chi(1)^2 \leq |G:Z(\chi)|$ 。等号成立当且仅当 χ 在 $G - Z(\chi)$ 上零化。

定理 3.1: 假设 $\chi \in \text{Irr}(G)$ 并且 $G/Z(\chi)$ 是阿贝尔群, 那么 $|G:Z(\chi)| = \chi(1)^2$ 。

G 的特征标 χ 是可靠的, 如果 $\ker\chi = 1$ 。所有的群都有一个可靠的特征标, 也就是正规特征标 ρ , 但不是所有的群都有可靠的不可约特征标。

定理 3.2: (a) 如果 G 有一个可靠的不可约特征标, 那么 $Z(G)$ 是周期的。

(b) 如果 G 是一个 p -群并且 $Z(G)$ 是周期的, 那么 G 有一个可靠的不可约特征标。