群表示理论

June 12, 2017

version 0.1

代数，模和表示

Contents

第一章主要给出了一些后面需要用到的环理论的基本定理和条件。

1 代数

定义 1.1： 设 F 是一个域，A 是 F-向量空间，同时也是带有单位元的环。假设对于任意 $c \in F$，$x, y \in A$，有 $(cx)y = c(xy) = x(cy)$。那么称 A 是一个 F-代数。

例如，$M_n(F)$ 是域 F 上的 $n \times n$ 矩阵代数。

再例如，令 V 是 F-向量空间，那么 $End(V)$，即 V 上 F-线性变换的集合在下列条件下是一个 F-代数：如果 $x, y \in End(V)$，那么 xy 被定义为 $(v)xy = ((v)x)y$，并且如果 $c \in F$，那么 cx 被定义为 $(v)(cx) = (cv)x$，显然，$(v)(x+y) = (v)x + (v)y$。

再举一个非常重要的例子：群代数。令 G 是一个有限群，$F[G]$ 是集合 $\{\sum_{g\in G} a_g g | a_g \in F\}$。显然 $F[G]$ 拥有 F-向量空间的结构，并且其中 $a_g = 1$，对任意 $h \neq g$，$a_h = 0$ 的元素被记为 g，也就是说 $F[G]$ 包含了 G 在其中，事实上 G 就是 $F[G]$ 的一组基。$F[G]$ 上的乘法由基向量也就是群 G 上的乘法加线性组合得到，容易验证 $F[G]$ 是 F-代数。

$F[G]$ 的构造展示了一种构造代数的通用办法。令 A 是一个基为 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 的 F-代数，我们有 $v_i v_j = \sum c_{ijk} v_k$，其中 $c_{ijk} \in F$。这些常数决定了这个代数，显然任何 n 维代数都可以由这样 n^3 个常数表示。当然，在随意选择常数的情况下，只有极少部分的组合可以定义一个代数。接下来我们提到的代数特指有限维代数。

如果 A 是一个 F-代数，那么 $F \cdot 1 = \{c1 | c \in F\}$ 是包含在中心 $\mathbf{E}(A)$ 中的 A 的子代数。在一些时候把 F 看成 A 的子代数是很方便的。

2 模

定义 2.1： 令 A 和 B 是 F-代数，假设 $\varphi : A \to B$ 满足：

(a) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$，对于任意 $x, y \in A$；

(b) $\varphi(1) = 1$；

(c) φ 是一个 F-线性变换。

那么 φ 是一个代数同态或者说是一个 F-同态。

定义 2.2: 令 A 是一个 F-代数，V 是一个有限维 F-向量空间。假设对于任意 $v \in V$，$x \in A$，都可以定义一个 $vx \in V$。假设对于任意 $x, y \in A$，$v, w \in V$，$c \in F$ 有:

(a) $(v+w)x = vx + wx$,

(b) $v(x+y) = vx + vy$,

(c) $(vx)y = v(xy)$,

(d) $(cv)x = c(vx) = v(cx)$,

(e) $v1 = v$。

那么称 V 是 A-模。

令 V 是一个 A-模，每一个 $x \in A$ 定义了一个 $v \mapsto vx$ 的映射 $x_V : V \to V$，由模的定义可知 $x_v \in End(V)$，并且映射 $x \mapsto x_v$ 是一个 $A \to End(V)$ 的代数同态，记为 A_V。

下面列举一些有关模的结论。如果 $A \subseteq End(V)$，那么 V 是 A-模。如果 $A = M_n(F)$，那么 F 上的 n 维列空间在矩阵乘法下构成 A-模。如果 A 是代数，那么 A 自身在右乘下构成 A-模，这个模称为正规 A-模，记为 A°。如果 V 是 A-模并且 $W \subseteq V$ 是一个 A-不变子空间，那么 W 是 V 的子模。因此 A 的右理想是 A° 的子模。如果 W 是 V 的子模，那么 V/W 在通常意义下是一个 A-模。

如果 W 和 V 都是 A-模，那么线性变换 φ 如果满足对任意 $v \in V$，$x \in A$ 都有 $\varphi(vx) = \varphi(v)x$，那么 φ 是一个 A-同态。A-同构是一个既单又满的 A-同态。

V 到 W 的同态构成的集合 $Hom_A(V, W)$ 是一个 F-空间。特别地，$Hom_A(V, V)$ 是一个环，也是一个 F-代数。它就是 A_V 在 $End(V)$ 当中的中心，记为 $\mathbf{E}_A(V)$。如果 $E = \mathbf{E}_A(V)$，那么 V 是一个 E-模，并且 $\mathbf{E}_E(V) \supseteq A_V$。

定义 2.3: 如果 V 是一个非零子模，那么 V 是不可约的当且仅当它的子模只有 0 和 V。

显然如果 $\varphi \in Hom_A(V, W)$，那么 $ker\varphi$ 和 $im\varphi$ 分别是 V 和 W 的子模，因此我们得到下面这个重要的引理。

引理 2.1： *(Schur)* 如果 V 和 W 都是不可约 A-模，那么 $Hom_A(V,W)$ 中的每个非零元素在 $Hom_A(W,V)$ 中都有逆。

由 Schur 引理可知，如果 V 是一个不可约 A-模，那么 $\mathbf{E}_E(V)$ 是一个可除代数，即其中的每一个非零元素都是可逆的。

推论 2.1： 假设 F 是代数闭包，A 是一个 F-代数，V 是不可约 A-模，那么 $\boldsymbol{E}_A(V) = F \cdot 1$，$V$ 上标量乘法的集合。

为了说明研究不可约模的意义，我们指出对于一些特定的代数，它的每一个模都是不可约模的直和。

定义 2.4： 令 V 是一个 A-模，假设对于所有的子模 $W \subseteq V$，都存在另一个子模 $U \subseteq V$，使得 $V = W \dotplus U$，那么称 V 是完全可约模。

定义 2.5： 代数 A 是半单的，如果它的正规模 A° 是完全可约的。

定理 2.1： *(Maschke)* 令 G 是一个有限群，F 是一个特征为 p 的域，p 不整除 $|G|$，那么每一个 $F[G]$-模都是完全可约的。

由 Maschke 定理可知，如果 $char(F) \nmid |G|$，那么 $F[G]$ 是半单的，反之也成立。

定理 2.2： 令 V 是一个 A-模，那么 V 是完全可约的当且仅当 V 是不可约子模之和。

引理 2.2： 令 V 是 A-模，假设 $V = \sum V_\alpha$，其中 V_α 是不可约模，那么 V 是其中一些 V_α 的直和。

从上述两个结论可以看出完全可约模就是不可约模的直和。因此想要了解特征 0 的域的群代数的所有模，只需要了解全部的不可约模即可。

定义 2.6： 令 V 是一个完全可约 A-模，令 M 是一个不可约 A-模。那么 V 的 M-齐次部分，记为 $M(V)$，是 V 中所有和 M 同构的子模之和。

引理 2.3: 令 $V=\sum\cdot W_i$ 是一些不可约 A-模 W_i 的直和，M 是任意不可约 A-模，那么

(a) $M(V)$ 是 V 的 $\boldsymbol{E}_A(V)$-子模;

(b) $M(V)=\sum\{W_i|W_i\cong M\}$;

(c) W_i 中和 M 同构的数量对于 V 不变，也就是说和直和分解无关。

由上述引理的 (b) 可知，一个完全可约模是对于不同 M 的 M-齐次部分的直和。

为了了解全部的不可约 A-模，我们需要探讨所有不可约 A-模的同构类，也就是一个代表元集。因此我们定义一个不可约 A-模的集合 $\mathcal{M}(A)$ 满足任意不可约 A-模在 $\mathcal{M}(A)$ 中有且仅有一个同构的 A-模。首先我们需要得到一个包含所有不可约 A-模的集合。

引理 2.4: 令 A 是一个 F-代数，那么每个不可约 A-模都同构于 A° 的一个因子模。如果 A 是半单的，那么每个不可约 A-模都同构于 A° 的一个子模。

定理 2.3: *(Wedderburn)* 令 A 是一个半单代数，令 M 是一个不可约 A-模，那么

(a) $M(A)$ 是 A 的极小理想;

(b) 如果 W 是不可约的，那么 W 要么和 M 同构，要么被 M 零化;

(c) 映射 $x\mapsto x_M$ 是从 $M(A)$ 到 $A_M\subseteq End(M)$ 的一一映射;

(d) $\mathcal{M}(A)$ 是一个有限集。

由于当 M_1 和 M_2 不同构时，$M_1(A)M_2(A)=0$，因此 $M(A)$ 的理想也是 A 的理想。又因为 $M(A)$ 是 A 的最小理想，因此 $M(A)$ 是单代数。因此 Wedderburn 定理又可以表述为一个半单代数可以分解为一些单代数的直和。

现在我们来总结一下：特征 0 的域上的群代数半单的；半单代数可分解为理想 $M(A)$ 的直和并且 $M(A)$ 和 A_M 同构。因此我们只需要研究单代数 A_M 即可。

定理 2.4: *(Double Centralizer)* 令 A 是一个半单代数，M 是一个不可约 A-模。令 $D=\boldsymbol{E}_A(M)$，那么 $\boldsymbol{E}_D(M)=A_M$。

3 表示

表示是模的另一种表现形式。

定义 3.1: 令 A 是一个 F-代数，A 的表示是一个代数同态 $\mathfrak{X}: A \to M_n(F)$。其中 n 是 $\mathfrak{X}$ 的维数。两个表示 $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ 是相似的，如果存在一个 $n \times n$ 的非奇异矩阵 P，使得对于任意 $a \in A$，$\mathfrak{X}(a) = P^{-1}\mathfrak{Y}(a)P$。

我们可以很容易地从一个表示构造一个模或者从一个模构造一个表示。如果 $\mathfrak{X}$ 是一个 F-代数 A 的维度为 n 的表示，令 V 是 F 上的 n 维列向量空间。如果 $v \in V$ 并且 X 是 F 上的任意 $n \times n$ 矩阵，那么 $vX \in V$。对于 $a \in A$，定义 $va = v\mathfrak{X}(a)$，可以验证在该定义下 V 是一个 A-模。反之，如果 M 是一个 A-模，选择 M 的一组 F-基，令 $\mathfrak{X}(a)$ 是 a_M 在这组基下的矩阵，我们也可以验证 $\mathfrak{X}$ 是一个表示。注意，选取不同的基通常可以得到不同的表示。

假设 V 和 W 都是 A-模，$\vartheta \in Hom_A(V, W)$，下面我们从表示的角度来看待上述关系。选择 V 和 W 的基 ι_V 和 ι_W，P 是线性变换 ϑ 在这两组基下的矩阵。对于任意 $v \in V$ 和 $a \in A$，我们有 $(va)\vartheta = (v\vartheta)a$，因此可以得到 $\mathfrak{X}(a)P = P\mathfrak{Y}(a)$，其中 $\mathfrak{X}$ 和 $\mathfrak{Y}$ 分别是 V 和 W 在上述两组基下的表示。如果 ϑ 是模同态，那么 P 是非奇异矩阵，于是 $\mathfrak{X}$ 和 $\mathfrak{Y}$ 是相似表示。特别地，一个给定的模在不同基的选取下得到的不同的表示都是相似的。从上述论证中我们还可以得到如果 $\mathfrak{X}$ 和 $\mathfrak{Y}$ 是相似的，那么 V 和 W 是同构的。进而，在 A-模的同构类和 A 的表示的相似类之间有着一一对应的关系。

如果 V 是一个 A-模，$W < V$ 是一个适当的非零子模，选取 W 的一组基，并拓展到 V 的一组基，将 W 的基排列在 V 的基的最后。令 $\mathfrak{X}$ 是 V 在那组基下的 A 的表示，$\mathfrak{Y}$ 是 W 在它的基下的 A 的表示，对于任意 $a \in A$，我们有 $\mathfrak{X}(a) = \begin{pmatrix} \mathfrak{Z}(a) & \mathfrak{U}(a) \\ 0 & \mathfrak{Y}(a) \end{pmatrix}$，其中 $\mathfrak{Z}$ 是 V/W 对应的表示，$\mathfrak{U}$ 不是表示。$\mathfrak{X}$ 被称为简化形式，且和 $\mathfrak{X}$ 相似的表示是可约的。因此不可约表示对应着不可约模。在上述情况下，如果存在子模 $U \subseteq V$ 并且 $V = W \dot{+} U$ 那么 $\mathfrak{U} = 0$，$\mathfrak{Z}$ 是 U 对应的表示，这样的 $\mathfrak{X}$ 对应的是完全可约模。