Dirac 方程

Contents

1 Introduction

Dirac 方程是一个场方程，应该与量子化过程分开。本文采用的记号为：

自然单位制

$$c = \hbar = 1 \tag{1}$$

度规

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}[-1, 1, 1, 1] \tag{2}$$

坐标

$$x^\mu = (t, \vec{x}) \tag{3}$$

$$x_\mu = (-t, \vec{x}) \tag{4}$$

能动量

$$p^\mu = (E, \vec{p}) \tag{5}$$

$$p_\mu = (-E, \vec{p}) \tag{6}$$

偏导数

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \tag{7}$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{8}$$

$$p^\mu = -i\partial^\mu \tag{9}$$

Dirac matrices

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 \tag{10}$$

这些定义与在其他的资料中的定义中可能不同，但是通常不会有物理上的区别

2 历史上 Dirac 方程的导出

在这一节里，我会简单地介绍历史上 dirac 方程的来源和导出过程，虽然事实上，“历史”的意思只是说这种对 dirac 方程的导出方法符合人们的思考规律。

Schrodinger 方程可以写作：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi,t\rangle = H|\psi,t\rangle \tag{11}$$

质能关系为：

$$E^2 = p^2 + m^2 \tag{12}$$

如果将相对论与量子力学统一起来，就会得到：

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = +\sqrt{-\nabla^2 + m^2}\psi(x,t) \tag{13}$$

这个方程有如下的问题：

- 左侧对时间的偏导数项出现在根号外。右边对空间的偏导数项在根号内部。这种时空的不对称性与相对论不协调。（当然，这不是一个真正的问题，在量子化时，时空也可能存在一些不等价性）
- 对一个偏微分算符做非多项式的运算，相当于进行无穷级数展开，这意味着考虑一个点时，需要的信息不再仅仅是这个点处的信息，而是需要全局的信息。

如果允许时间项是二阶项，可以得到 Klein-Golden 方程：

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,t) = (-\nabla^2 + m^2)\psi(x,t) \tag{14}$$

Klein-Golden 方程同样也会存在很多问题，比如负能解和负概率解。

为了解决这个问题，Dirac 提出了 Dirac 方程。它的全部出发点就是：Dirac 方程平方后能与 Klein-Golden 方程等价。

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = (-\alpha^j\partial_j + m)\psi(x) \tag{15}$$

两边平方则可以得到

$$\left\{\alpha^j, \alpha^k\right\} = 2\delta^{jk} \tag{16}$$

$$\left\{\alpha^j, \beta\right\} = 0 \tag{17}$$

$$\beta^2 = 1 \tag{18}$$

在前面的所有分析中，我们都没有做 α 和 β 是矩阵的假设，但是分析上面的等式，我们可以发现，α 和 β 是数字无法满足上面的条件。

于是，dirac 方程可以写作：

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi_a(x,t) = \left(-i(\alpha^j)_{ab}\partial_j + m(\beta)_{ab}\right)\psi_b(x) \tag{19}$$

在我们写下 Dirac 方程的现代形式之前，有必要显式地写下 α 和 β 矩阵的一种表示方法：

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

这里需要强调几个问题：其一是由于在不同的材料中符号的定义非常不同，经常有 -1 和 i 等的差别，希望读者不要过分在意可能出现的符号错误，对这些符号错误的检查经常会花费大量时间。其二是我们的全部出发点只是 Dirac 方程在平方后得到 Klein-Golden 方程，所以 α 和 β 矩阵的取值方式一定不唯一。关于 α，β 矩阵以及 Dirac 方程的不同表示方式我希望整理在一个 mathematica 文件中，这项工作目前还没有开始。

只要做一些简单的定义，我们就可以得到 Dirac 非常简单与现代的形式：

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi(x,t) = 0 \tag{22}$$

3 Klein Golden 方程的进一步讨论

关于 Kelin Golden 方程

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,t) = (-\nabla^2 + m^2)\psi(x,t) \tag{23}$$

我们首先再次指出，这是一个波动方程，是一个经典方程，我们接下来的任务就是求这个方程的解。我们使用分离变量法。定义

$$\psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt} \tag{24}$$

代入 Klein Golden 方程可得

$$E^2\psi(x) = (-\nabla^2 + m^2)\psi(x,t) \tag{25}$$

4 洛仑兹不变性

对于任何一个理论，如果我们希望它在相对论条件下成立，都应该检验它的洛仑兹不变性所谓的洛仑兹不变性，指的是在 $\bar{S}$ 参考系中，方程中的所有量都替换成带 $^-$ 的形式，方程仍然成立。

在上一节中，我们曾经写下了 Dirac 方程

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi(x,t) = 0 \tag{26}$$

这种表示方式不仅仅是表示方便，而且容易写出相对论下的变换

我们通过以下变换来研究这个方程：首先写下在 $\bar{S}$ 系下的方程

$$\left(i\bar{\gamma}^\mu \bar{\partial}_\mu - \bar{m}\right)\bar{\psi}(x,t) = 0 \tag{27}$$

首先，观察到：$\bar{m}$，$\bar{\partial}_\mu$ 以及 $\bar{\psi}$ 都是与 Dirac 方程无关的量（指的是，这些量的定义不依赖于 Dirac 方程）。它们的变换形式应该由它们本身决定。于是有：

$$\left(i\bar{\gamma}^\mu \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu - m\right) L\psi(x,t) = 0 \tag{28}$$

同样应该指出：读者不要过分纠结与主动或被动变换

我们希望在26成立的条件下，28可以自动成立，对26式做如下变换：插入一些算符：

$$L\left(i\gamma^\mu \Lambda^{-1}\Lambda \partial_\mu - m\right) L^{-1}L\psi(x,t) = 0 \tag{29}$$

矢量指标与旋量指标可换，于是可以得到：

$$L^{-1}\bar{\gamma}^{\mu}L=\gamma^{\mu}\Lambda^{-1} \tag{30}$$

这个式子说明：γ 是真正的矢量！从而也说明了 Dirac 方程的洛仑兹不变性

这给我们带来另一个问题：在 S 系中选择的 γ 矩阵有了特殊性，物理量不应该有一个洛仑兹因子的差别。所以我们实际上想要求的是：

$$L^{-1}\gamma^{\mu}L=\gamma^{\mu}\Lambda^{-1} \tag{31}$$

式30和式31有着非常本质的区别：式30是在没有给定 $\bar{\gamma}$ 的条件下对 $\bar{\gamma}$ 进行定义，而式31是在所有量都定义清楚的条件下给 γ 矩阵另外的约束。

5 自旋 1/2 粒子的洛仑兹变换

在上面的讨论中，我们已经指出 ψ 的变换与 Dirac 方程无关，但是我们希望能够显式地写出 L 矩阵的具体形式，使我们对 γ 矩阵的变换有更直观的理解。

对于 L 矩阵，我们知道它 associated with 一个 Λ，利用下面的两式：

$$L_a{}^b(\Lambda')\Lambda_b{}^c=L_a^c(\Lambda\Lambda') \tag{32}$$

$$L_a{}^b(1+\delta\omega)=\delta_a{}^b+\frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_a{}^b \tag{33}$$

这样，就会得到：

$$[S^{\mu\nu},S^{\rho\sigma}]=i\left(g^{\mu\rho}S^{\nu\sigma}-\mu|\nu\right)-\rho|\sigma \tag{34}$$

应该指出的是，所有的洛仑兹群表示都满足上面的两式，从而满足这样的对易关系。李代数又可以仅有其结构常数决定，因此，如果验证了

$$1 \tag{35}$$